对偶空间，张量代数，微分形式，斯托克斯公式

本讲义的目的是介绍并部分证明斯托克斯公式的一般形式：

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} i^* \omega \tag{1}$$

其中ω 是$(n-1)$ 阶微分形式，$\partial\Omega$ 代表可定向区域Ω 的边界。i^* 是嵌入映射诱导的拉回映射。斯托克斯公式可以看成微积分基本定理在高维情形的推广，格林公式和高斯散度定理都是它的特殊情形。定义微分形式需要利用张量代数、切空间、余切空间等概念。参考资料：《微分几何讲义》（陈省身、陈维桓著）第一、二、三章。

1 线性空间

一个实数上的n维线性空间始终可以看成n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$，是所有n维向量构成的集合。$\mathbb{R}^n$中的元素（向量）有点乘（内积）、数乘、加减法等运算。如果$n=3$，则还有叉乘运算。

1.1 有限维线性空间的基和坐标:

对于$n-$维线性空间V，假如$e_1, ..., e_n \in V$，并且对于任意的$\alpha \in V$，存在实数$a_1(\alpha), ..., a_n(\alpha)$，使得

$$\alpha = a_1(\alpha)e_1 + ... + a_n(\alpha)e_n \tag{2}$$

则称$\{e_1, ..., e_n\}$是V的一组基。$a_1(\alpha), ..., a_n(\alpha)$称为$\alpha$的坐标。

- 坐标的唯一性。

1.2 有限维线性空间之间的线性映射–矩阵:

对于n维线性空间V_1和m维线性空间V_2，一个映射$A : V_1 \to V_2$称为线性的，如果对任意的实数a, b以及$\alpha, \beta \in V_1$：

$$A(a\alpha + b\beta) = aA(\alpha) + bA(\beta) \tag{3}$$

假如$e_1, ..., e_n$ 是V_1 的一组基，$s_1, ..., s_m$ 是V_2 的一组基。则存在实数$\{a_{ij} : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\}$：

$$A(e_i) = a_{i1}s_1 + ... + a_{im}s_m \tag{4}$$

从这个角度看，线性映射A 对应了一个$n \times m$ 矩阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

这个矩阵由A, 基向量$\{e_i : 1 \le i \le n\}$ 和基向量$\{s_i : 1 \le i \le m\}$决定。

作业**1.1.** 对于V_1的另一组基向量$\{\tilde{e}_i\}$ 和V_2的另一组基向量$\{\tilde{s}_i\}$，假设对任意的$i = 1, 2, ..., n$

$$\tilde{e}_i = p_{i1}e_1 + ... + p_{in}e_n \tag{6}$$

以及对任意的$j = 1, 2, ..., m$

$$\tilde{s}_j = q_{j1}s_1 + ... + q_{jm}s_m, \tag{7}$$

求A 在基向量$\{\tilde{e}_i\}$ 和$\{\tilde{s}_j\}$ 下对应的矩阵。

1.3 线性映射诱导的坐标变换:

假设$A : V \to V$ 是一个线性映射，对于基向量$\{e_i\}$, 有

$$A(e_i) = a_{i1}e_1 + ... + a_{in}e_n \tag{8}$$

对于V中的任意向量$\alpha = c_1e_1 + ... + c_ne_n$, $A(\alpha)$ 在原基向量下的展开为：

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= c_1A(e_1) + ... + c_nA(e_n) \\ &= (c_1, ..., c_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{9}$$

因此$A(\alpha)$ 在原基向量下的坐标为

$$(c_1, ..., c_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

作业**1.2.** 设A 是可逆映射，求α 在新的基向量$\{A(e_i) : 1 \le i \le n\}$ 下的坐标。

1.4 矩阵的秩:

对于矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$，它的秩定义为由其所有行向量$\alpha_i=(a_{11},\dots,a_{1n})$ 张成的线性空间的维数，也可定义为由其所有列向量$\beta_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ 所张成的线性空间的维数。两者等价。

1.5 矩阵的行列式:

对于矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$，它的行列式定义为

$$\det(A)=\sum_{\sigma\in\mathrm{Perm}_n}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)} \tag{11}$$

- $\det(A)$ 等于其行向量（或列向量）生成的平行$2n-$面体的体积。
- $\det(A)$ 只有当A 是矩阵时才有定义。当A 是一个线性映射时，对于给定的一组基，A 可以看成一个矩阵。对于不同的基，A 对应的矩阵也不一样。但是数学上可以证明，对于不同的基，A 对应矩阵的行列式都是一样的。因此对于线性映射A, $\det(A)$ 也是良定义的。
- $\det(A)$ 可以看成线性映射A 的体积膨胀倍数。

作业**1.3.** 解释（或证明）为什么$|\det(AB)|=|\det(A)||\det(B)|$?

2 对偶空间

对于n维线性空间V，考虑线性映射$l:V\to\mathbb{R}$。所有这样的线性映射构成的集合也是一个线性空间，称之为V 的对偶空间V^*。V^* 和V 有相同的维度。对于V 中的基向量$\{e_i:1\le i\le n\}$，可以定义一组V^*的基向量$\{e_i^*\}$，称之为$\{e_i\}$ 的对偶基:

$$e_i^*(e_j)=\delta_{ij} \tag{12}$$

- e_i^* 的定义不光依赖于e_i，还依赖于$...,e_{i-1},e_{i+1},...$。

2.1 对偶映射:

假如U,V分别为n维和m维线性空间，$\{v_i\}$ 和$\{u_i\}$ 分别是V,U 的一组基向量，而$A:U\to V$ 是一个线性映射，满足

$$A(u_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}v_j \tag{13}$$

对任意的$v^* \in V^*$，定义线性映射$A^*(v^*) \in U^*$，使得对任意的$u \in U$，

$$\Big(A^*(v^*)\Big)(u) = v^*(A(u)) \tag{14}$$

如此我们得到一个线性映射$A^*: V^* \to U^*$。直接验算：

$$A^*(v_i^*)(u_j) = v_i^*(A(u_j)) = v_i^*(\sum_{k=1}^m a_{jk}v_k) = \sum_{k=1}^m a_{jk}\delta_{ik} = a_{ji} \tag{15}$$

因此

$$A^*(v_i^*) = \sum_{j=1}^n a_{ji}u_j^* \tag{16}$$

- A^*在基向量$\{u_i^*\}, \{v_j^*\}$ 下对应的矩阵是A在基向量$\{u_i\}, \{v_j\}$下对应的矩阵的转秩。A^* 称之为A 的对偶映射。
- 假设$A: U \longrightarrow V$，$B: V \longrightarrow W$，可以证明$(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$.

3 张量代数

3.1 线性空间的张量积:

对于任意的线性空间V，定义$V \otimes V$ 为所有形如$v_1 \otimes v_2$ 的元素张成的线性空间，并且满足如下定律（$a, b, c, d \in \mathbb{R}$）：

$$(av_1 + bv_2) \otimes (cv_3 + dv_4) = acv_1 \otimes v_3 + adv_1 \otimes v_4 + bcv_2 \otimes v_3 + bdv_2 \otimes v_4 \tag{17}$$

- 如果$\{e_i\}$ 是V 的一组基向量，则$\{e_i \otimes e_j\}$ 是$V \otimes V$ 的一组基向量。
- $\dim(V \otimes V) = (\dim V)^2$
- $(V \otimes V) \otimes V = V \otimes (V \otimes V)$，因此可以简单写为$V \otimes V \otimes V$
- k个V 做张量积写为$V^{\otimes k}$，其元素称为k阶张量。

3.2 $A^{\otimes k}$:

假如$A: V \longrightarrow U$ 是一个线性映射，则它诱导线性映射

$$\begin{gathered} A^{\otimes k}: V^{\otimes k} \longrightarrow U^{\otimes k} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \longrightarrow A(v_1) \otimes \cdots \otimes A(v_k) \end{gathered} \tag{18}$$

3.3 对称张量:

对于一个任意的2阶张量$T = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}e_i \otimes e_j$, 可以看出，$T$ 对应了一个矩阵$F = (f_{ij})_{1 \le i,j \le n}$。反过来

任意一个$n \times n$矩阵可以对应一个2阶张量。$F^\top$ 对应的2阶张量为$\sum_{i,j=1}^{n} f_{ji} e_i \otimes e_j \neq T$，除非$F$是对称矩阵。

对于任意的2阶张量$T = \sum_{ij} f_{ij} e_i \otimes e_j$，可以将其对称化：

$$\mathrm{Sym}(T) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (f_{ij} + f_{ji}) e_i \otimes e_j \tag{19}$$

对于k 阶张量$T = \sum_{i_1,\ldots,i_k} f_{i_1\ldots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$，定义

$$\mathrm{Sym}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k} f_{i_1\ldots i_k} \Big[\sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}_k} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}} \Big] \tag{20}$$

3.4 反对称张量:

对于任意k 阶张量$T = \sum_{i_1,\ldots,i_k} f_{i_1\ldots i_k} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}$，可以将其反对称化：

$$\mathrm{Asym}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\ldots,i_k} f_{i_1\ldots i_k} \Big[\sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}_k} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}} \Big] \tag{21}$$

由V生成的所有k 阶反对称张量构成的线性空间记为$\bigwedge^k V$。

- 记$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} = \sum_{\sigma \in \mathrm{Perm}_k} (-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(k)}}$
- 可以证明，$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$ 构成$\bigwedge^k V$ 的一组基。
- 可以证明，$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_l} \wedge e_{i_{l+1}} \wedge \ldots e_{i_k} = -e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_l+1} \wedge e_{i_l} \wedge \ldots e_{i_k}$
- 若$\xi \in \bigwedge^k V, \eta \in \wedge^l V$，则定义$\xi \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \mathrm{Asym}(\xi \otimes \eta)$

作业3.1. 对于2阶张量$T = \sum_{i,j} f_{ij} e_i \otimes e_j$，写出$Asym(T)$的具体表达式。证明任意二阶张量可以写成一个对称2阶张量和反对称2阶张量的和。

作业3.2. 证明$\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n\}$ 构成$\bigwedge^k V$ 的一组基。

作业3.3. 证明$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$

作业**3.4.** 哪一个正确：$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_3 \wedge e_2 \wedge e_1$ 还是$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = -e_3 \wedge e_2 \wedge e_1$?

作业**3.5.** 已知$\dim V = n$, 求$\dim \bigwedge^k V$。

作业**3.6.** 已知$\dim V = n$, 求$V^{\otimes k}$ 中所有对称张量构成的线性空间的维数。

作业**3.7.** 根据$\xi \wedge \eta$的定义，证明$(e_1 \wedge e_2) \wedge (e_3 \wedge e_4) = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$

3.5 $A^{\wedge k}$:

假如$A : V \longrightarrow U$ 是一个线性映射，则它诱导线性映射

$$\begin{aligned} A^{\wedge k} : \bigwedge^k V &\longrightarrow \bigwedge^k U \\ v_1 \wedge \cdots \wedge v_k &\longrightarrow A(v_1) \wedge \cdots \wedge A(v_k) \end{aligned} \tag{22}$$

可以证明，$A^{\wedge k}$ 的定义和$A^{\otimes k}$ 的定义不冲突。

作业**3.8.** *(*选做*)* 证明$A^{\wedge k}$ 的定义和$A^{\otimes k}$ 的定义不冲突。

作业**3.9.** 设$\{e_1, ..., e_n\}$ 是线性空间V 的一组基。证明对任意的$v_1, ..., v_n \in V$, 存在实数a，使得$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n = ae_1 \wedge \cdots \wedge n$. 设$v_i = \sum_j c_{ij} e_j$。令$C$ 表示第i 行j 列等于c_{ij} 的矩阵。证明$a = \det(C)$。

作业**3.10.** 证明对任意的$v_1, ..., v_n \in V$, $A^{\wedge n}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \det(A) v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$

4 微分形式

4.1 欧氏空间的切空间

- 对于欧式空间$\mathbb{R}^n$中的一点p，其切空间定义为所有由p为起点的$\mathbb{R}^n$中向量的集合，记为$T_p\mathbb{R}^n$。
- 显然$T_p\mathbb{R}^n$是一个线性空间且$\dim T_p\mathbb{R}^n = n$。对于不同的点p, q，$T_p\mathbb{R}^n \neq T_q\mathbb{R}^n$，也不能将$T_p\mathbb{R}^n$ 和$T_q\mathbb{R}^n$ 中的向量直接相加。但可以将$T_p\mathbb{R}^n$ 和$T_q\mathbb{R}^m$ 很自然的对应起来。
- 用$e_i(p)$ 表示由p点出发的平行于e_i的向量。则$\{e_i(p)\}$ 构成$T_p\mathbb{R}^n$的一组基向量，称之为自然基。

4.2 欧氏空间中曲面的切空间$T_p\mathcal{M}$

假如$\mathcal{M}$是$\mathbb{R}^N$中的一个m维曲面$(n \geq m)$，对于$\mathcal{M}$上一点p，定义$T_p\mathcal{M}$为所有$\mathbb{R}^N$ 中所有和$\mathcal{M}$相切于p点的从p出发的向量构成的集合。不难验证，$T_p\mathcal{M}$也是一个线性空间，且$\dim T_p\mathcal{M} = m$。

- $T_p\mathcal{M}$中的向量可以理解为$\mathcal{M}$中经过p点的曲线在p点的切向量。假设$\gamma : [0,1] \to \mathcal{M}$为$\mathcal{M}$中一条从$p$点出发的光滑曲线（即$\gamma(0) = p$），则

$$v = \frac{d\gamma(t)}{dt}\Big|_{t=0} \in T_p\mathcal{M} \subset T_p\mathbb{R}^N \tag{23}$$

4.3 由(非线性)映射诱导的切空间映射

假若$\mathcal{M}$和$\mathcal{N}$分别是$\mathbb{R}^N$中m维和n维的曲面$(N \geq n, m)$，$\mathcal{M}, \mathcal{N}$可以是$\mathbb{R}^m$或$\mathbb{R}^n$这种平直的欧氏空间。

对于光滑映射$\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$，以及$p \in \mathcal{M}$，记$q = \phi(p)$，则$\phi$ 诱导映射

$$\begin{aligned} \phi_* : T_p\mathcal{M} &\longrightarrow T_q\mathcal{N} \\ \frac{d\gamma}{dt}\Big|_{t=0} &\longrightarrow \frac{d(\phi \circ \gamma)}{dt}\Big|_{t=0} \end{aligned} \tag{24}$$

其中$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}$ 是任意从p出发的光滑曲线。

- 对任意的曲面$\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{Q}$，若$\phi_1 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}, \phi_2 : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{Q}$，可以证明$\phi_{2*} \circ \phi_{1*} = (\phi_2 \circ \phi_1)_*$.
- ϕ_* 是个线性映射。

4.4 曲面的坐标卡

将$\mathbb{R}^m$中的标准立方体（不含边界）记为$C_m = (-1,1)^m$。假设$\mathcal{M}$是$\mathbb{R}^N$中的m维光滑曲面，$p \in \mathcal{M}$。如果存在光滑可逆映射(并要求其逆映射也光滑)$\Phi : C_m \longrightarrow \mathcal{M}$，且$\Phi(o) = p$，$o$为$C_m$中心点，则称$(U_p, \Phi)$是$p$点附近的一个坐标卡，其中$U_p = \Phi(C_m)\Delta \subset \mathcal{M}$。一个点可以有很多不同的坐标卡。

4.5 由坐标卡定义$T_p\mathcal{M}$的一组基$\{\frac{\partial}{\partial x^i} : 1 \leq i \leq m\}$

Φ诱导$\Phi_* : T_oC_m \longrightarrow T_p\mathcal{M}$。我们已知$\{e_i(o)\}$构成$T_oC_m$的一组基。由于$C_m$和$\mathcal{M}$维数相同，因此$\Phi_*$是可逆映射。并且$\{\Phi_*(e_i(o))\}$是$T_p\mathcal{M}$的一组基。

作业**4.1.** 已知m维光滑曲面$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$，$p \in \mathcal{M}$,以及$p$点附近的坐标卡$(U_p, \Phi)$。用$(x_1, ..., x_m)$表示$C_m$中点的坐标，用$(y_1, ..., y_N)$表示$\mathbb{R}^N$中点的坐标。因此$\Phi$有向量表示：$(\Phi^1(x), ..., \Phi^N(x))$，其中每个$\Phi^j$都是$C_m$上的函数。分别用$\{e_i(o) : 1 \leq i \leq m\}$和$\{e_i(p) : 1 \leq i \leq N\}$表示$T_oC_m$和$T_p\mathbb{R}^N$的自然基。试用函数$\Phi^1, ..., \Phi^N$ 和$\{e_j(p)\}$ 表示$\Phi_*(e_i(o))$，即计算展开式$\Phi_*(e_i(o)) = \sum_{ij} a_{ij}e_j(p)$中的系数。

- 在已知坐标卡(U_p, Φ)的情形下，$\{\Phi_*(e_i(o))\}$ 即$T_p\mathcal{M}$的一组基，通常写作$\frac{\partial}{\partial x_i}$.

- 注意$T_p\mathcal{M}$ 的定义不依赖于坐标卡（但在本讲义中依赖于$\mathcal{M}$ 所在的外部空间$\mathbb{R}^N$；事实上也不需要依赖于其所处的外部空间，但为了避免引入过多数学概念，这里不对此做精确说明），因此对于任意的$\alpha \in T_p\mathcal{M}$，它本身也不需要依赖于坐标卡的定义。但是如果要将$\alpha$ 具体地表示出来，则需要用到坐标卡。

- 一般情形下不存在全局坐标卡，因此坐标卡一般只能表示曲面的一部分的坐标。

4.6 光滑向量场$T\mathcal{M}$

一个映射$\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow \bigcup\limits_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$ 如果满足对任意的$p \in \mathcal{M}$ 都有$\alpha(p) \in T_p\mathcal{M}$，则称$\alpha$ 为$\mathcal{M}$ 上的一个向量场。设$p \in \mathcal{M}$，(U_p, Φ)是p 附近的一个坐标卡。坐标卡(U_p, Φ) 覆盖了p 点附近所有的点。假如p' 也被该坐标卡覆盖，则$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 也可以看成$T_{p'}\mathcal{M}$ 的一组基向量。因此$T_{p'}\mathcal{M}$ 中的元素也可以写成$\sum\limits_i a_i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 的形式。其中a_i 依赖于p', 因此a_i 其实是$a_i(p')$, 一个依赖于p' 的函数。

对任意的被该坐标卡覆盖的点p'，如果展开式$\alpha(p') = \sum\limits_i a_i(p') \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ 中$a_i(p')$ 都是该坐标卡覆盖范围内的光滑函数，则称α 在p 处光滑。如果对任意的$p \in \mathcal{M}$, α 都在p 处光滑，则称α 是$\mathcal{M}$ 上的一个光滑向量场，或称之为$\bigcup\limits_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$ 中的一个光滑截面。$\bigcup\limits_{p\in\mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$ 中所有光滑截面的集合记为$T\mathcal{M}$，称为切向量丛。

> 作业**4.2.** 问题：$T\mathcal{M}$ 也是$\mathbb{R}$ 上的线性空间，其维数是多少？是否为m？写明原因。

4.7 ϕ_* 在基向量$\{\frac{\partial}{\partial x_i} : 1 \le i \le m\}$ 和$\{\frac{\partial}{\partial y_j} : 1 \le j \le n\}$ 下的表示; 链式法则

设$\mathbb{R}^N$ 中的m 维曲面$\mathcal{M}$ 和n 维曲面$\mathcal{N}$，$\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ 是一个光滑映射，$p \in \mathcal{M}, q = \phi(p)$。给定$p$ 附近的坐标卡(U_p, Φ)，q 附近的坐标卡(U_q, Ψ)。用$x = (x^1, ..., x^m)$ 表示U_p 中点的坐标，用$y = (y^1, ..., y^n)$ 表示U_q 中点的坐标。我们已知$T_p\mathcal{M}$ 有基向量$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$，$T_q\mathcal{N}$ 有基向量$\{\frac{\partial}{\partial y^j}\}$，我们要计算展开式$\phi_*(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum\limits_j a_{ij} \dfrac{\partial}{\partial y^j}$ 中的系数。

设$\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow C_m$ 满足$\gamma_1(0) = o_m$，且$\frac{d\gamma_1(t)}{dt}\Big|_{t=0} = e_i(o_m)$，则$\gamma_2 = \Phi \circ \gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{M}$ 满足$\gamma_2(0) = p$, 且$\frac{d\gamma_2(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \Phi_*(e_i(o_m)) = \frac{\partial}{\partial x^i}$。

记$f = \Psi^{-1} \circ \phi \circ \Phi : C_m \longrightarrow C_n$. 由于$f$，$y$ 可以看成x 的函数。考虑$\gamma_3 = \Psi^{-1} \circ \phi \circ \Phi \circ \gamma_1 = f \circ \gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow C_n$，则

$$\frac{d\gamma_3(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{\partial f^j}{\partial x^i} e_j(o_n) \tag{25}$$

因此

$$\phi_*(\frac{\partial}{\partial x^i}) = \sum_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \Psi_*(e_j(o_n)) = \sum_j \frac{\partial f^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{26}$$

由于坐标卡中的点可以和p (或q)附近的点一一对应，有时ϕ 直接定义为坐标卡之间的映射，此时$f=\phi$，上式也可写为$\phi_*(\frac{\partial}{\partial x^i})=\sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$。

4.8 余切空间$T_p^*\mathcal{M}$，$\bigwedge^k T_p^*\mathcal{M}$

对于$p\in\mathcal{M}$，其余切空间为$T_p\mathcal{M}$ 的对偶空间，用$T_p^*\mathcal{M}$ 表示。若(U_p,Φ) 是p 附近的一个坐标卡，以$x=(x^1,...,x^m)$ 表示其坐标，则$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 为$T_p\mathcal{M}$ 的一组基向量，其对偶基记为$\{dx^i\}$。

根据张量代数的理论，$\{dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}:1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le m\}$ 是$\bigwedge^k T_p^*\mathcal{M}$ 的一组基。

4.9 拉回映射ϕ^*

对于$\phi:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$, $p\in\mathcal{M},q=\phi(p)$，我们有切映射$\phi_*:T_p\mathcal{M}\longrightarrow T_q\mathcal{N}$，以及其对偶映射$\phi^*:T_q^*\mathcal{N}\longrightarrow T_p^*\mathcal{M}$. ϕ^* 称之为拉回映射。接下来我们计算ϕ^* 在基向量$\{dy^j\}$ 和$\{dx^i\}$ 下的表达式。

根据定义

$$(\phi^*(dy^j))(\frac{\partial}{\partial x^i})=dy^j(\phi_*(\frac{\partial}{\partial x^i}))=dy^j(\sum_k\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^k})=\sum_k\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\delta_{jk}=\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \tag{27}$$

因此

$$\phi^*(dy^j)=\sum_i\frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i \tag{28}$$

- 上式和微积分中的链式法则有相同的形式。
- 拉回映射ϕ^* 可以扩张到$\bigwedge^k T_p^*\mathcal{N}$，此时仍用$\phi^*$ 表示。
- $\phi^*(dy_{i_1}\wedge\cdots\wedge dy_{i_k})=\phi^*(dy_{i_1})\wedge\cdots\wedge\phi^*(dy_{i_k})$
- 若$\phi_1:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$，$\phi_2:\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{Q}$，则$\phi_1^*\circ\phi_2^*=(\phi_2\circ\phi_1)^*$.
- 若ϕ 可逆，则$(\phi^*)^{-1}=(\phi^{-1})^*$

作业**4.3.** 若$m<n$, 证明：$\phi^*(dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)=0$。

作业**4.4.** 若$m=n$, 证明：$\phi^*(dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n)=\det\left(\frac{\partial(y^1,...,y^n)}{\partial(x^1,...,x^n)}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$。

4.10 微分形式

类似于$T\mathcal{M}$ 是 $\bigcup_{p\in\mathcal{M}}$ 中的光滑截面构成的集合, 我们同样可以定义$\bigwedge^k T^*\mathcal{M}$ 为 $\bigcup_{p\in\mathcal{M}}\bigwedge^k T_p^*\mathcal{M}$ 中所有光滑截面构成的集合。ϕ^* 自然地推广为$\phi^*:\bigwedge^k T^*\mathcal{N}\longrightarrow\bigwedge^k T^*\mathcal{M}$. $\bigwedge^k T^*\mathcal{M}$ 中的元素即曲面$\mathcal{M}$ 上的$k-$阶微分形式。

- 若$\mathcal{M}$ 为m 维曲面，则其上最多只能存在$0,1,2,...,m$ 阶非零微分形式，而不可能存在$m+1,m+2,...$ 阶非零微分形式。

4.11 外微分算子$d:\bigwedge^k T_{\mathcal{M}} \longrightarrow \bigwedge^{k+1} T\mathcal{M}$

给定曲面$\mathcal{M}$ 以及某个局部坐标卡(U,Φ)，$x=(x^1,...,x^m)$ 为其坐标表示。设ω 为$\mathcal{M}$ 上的k 阶微分形式且在该局部坐标下有表达式:$\omega = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_k} f_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$。定义

$$d\omega = \sum_{i_1\ldots i_k} \sum_i \frac{\partial f_{i_1\ldots i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \tag{29}$$

- d 的定义与坐标卡的选取无关。
- 设$\phi:\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$, 则一定有$d\circ\phi^* = \phi^* \circ d$

5 斯托克斯公式

5.1 微分形式的积分和曲面的定向

假设m 维曲面$\mathcal{M}$ 有局部坐标卡，

$$\Phi:\mathbb{R}^m \supset D \longrightarrow \Omega \subset \mathcal{M} \tag{30}$$

同时有微分形式$\omega \in \bigwedge^m T^*\mathcal{M}$。则$\Phi^*\omega$ 在D 上可以表示为$\Phi^*\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$，其中$f$ 是D 上的函数。“定义” ω 在Ω 上的积分为:

$$\int_\Omega \omega = \int_D f dx^1 \ldots dx^m \tag{31}$$

定理**5.1.** 假设有两个坐标卡描述$\mathcal{M}$ 上的同一区域，

$$\Phi_i:\mathbb{R}^m \supset D_i \longrightarrow \Omega \subset \mathcal{M} \tag{32}$$

则在D_1 上有$\Phi_1^*\omega = f_1 dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$，在$D_2$ 上有$\Phi_2^*\omega = f_2 dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$，那么

$$\int_{D_1} f_1 dx^1 \ldots dx^m = \pm \int_{D_2} f_2 dy^1 \ldots dy^m \tag{33}$$

证明**.** 考虑$\phi = \Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : D_1 \longrightarrow D_2$, 在$\phi$ 的作用下，y 可以看成是x 的函数。则

$$\begin{aligned}\phi^*(f_2 dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m) &= (\Phi_2^{-1}\circ\Phi_1)^*((\Phi_2^{-1})^*)\omega) = \Big[\Phi_1^* \circ (\Phi_2^{-1})^*\Big](\Phi_2^*\omega) \\ &= \Phi_1^* \circ (\Phi_2^*)^{-1} \circ \Phi_2^*(\omega) = \Phi_1^*\omega = f_1 dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m\end{aligned} \tag{34}$$

同时我们已知:

$$\phi^*(f_2 dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m) = f_2 \det\Big(\frac{\partial(y^1,...,y^m)}{\partial(x^1,...,x^m)}\Big) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \tag{35}$$

可以证明

$$\int_{D_2} f_2 dy^1 \dots dy^m = \int_{\phi^{-1}(D_2)} f_2 \Big| \det\left(\frac{\partial(y^1,...,y^m)}{\partial(x^1,...,x^m)}\right) \Big| dx^1 \dots dx^m \tag{36}$$

另一方面，由于ϕ 是光滑双射，因此$\det\left(\frac{\partial(y^1,...,y^m)}{\partial(x^1,...,x^m)}\right)$ 要么恒为正，要么恒为负。因此结论成立。 □

由此可见，若要准确的定义$\int_\Omega \omega$，我们需要假设$\mathcal{M}$ 上不同坐标卡之间的雅可比矩阵的行列式恒为正数。注意到雅可比矩阵的"链式传递法则"：

如果

$$(D_1, x) \longrightarrow (D_2, y) \longrightarrow (D_3, z) \tag{37}$$

则

$$\frac{\partial(z^1,...,z^m)}{\partial(x^1,...,x^m)} = \frac{\partial(z^1,...,z^m)}{\partial(y^1,...,y^m)} \frac{\partial(y^1,...,y^m)}{\partial(x^1,...,x^m)} \tag{38}$$

这表明，如果z 坐标和y 坐标之间的雅可比矩阵行列式恒为正数，y 坐标和x 坐标之间的雅可比矩阵行列式恒为正数，则z 坐标和x 坐标之间的雅可比矩阵行列式也恒为正数。因此，对于任意一点$p \in \mathcal{M}$, 我们可以把p 点的局部坐标卡分为两类，同类坐标卡之间的雅可比矩阵的行列式在p 点始终为正值，不同类坐标卡之间的雅可比矩阵的行列式在p 点始终为负值。一类坐标卡被称为$\mathcal{M}$ 在p 点的一个定向。反过来，当我们说p 点的一个定向时，我们指的是p 点的两类局部坐标卡中的一类。

是否有可能对每一个$p \in \mathcal{M}$ 选取一个局部定向，使得不同点p, q 之间的定向不矛盾，从而得到一个全局的定向？对于一般意义上的曲面$\mathcal{M}$, 有时候不存在这种全局的定向，比如著名的"莫比乌斯带"。如果一个曲面$\mathcal{M}$ 存在一个全局定向，则我们称$\mathcal{M}$ 为可定向曲面。根据前面的讨论，如果$\mathcal{M}$ 存在一个全局定向，则我们可以准确定义$\int_{\mathcal{M}} \alpha$，其中$\alpha \in \bigwedge^m T^*\mathcal{M}$.

定义**5.1** (可定向曲面)**.** 设$\mathcal{M}$ 是一个m 维曲面，如果存在一个完整的坐标覆盖满足以下条件，则称$\mathcal{M}$ 可定向：对于该覆盖中的任意两个坐标卡(U_p, Φ_1) 和(V_p, Φ_2)，在他们相交的部分始终有$\det(\frac{\partial(y^1,...,y^m)}{\partial(x^1,...,x^m)}) > 0$。

在地球流体中遇到的曲面，比如地球表面，整个海洋区域，整个大气区域，都是可定向的。另：不可定向曲面上仍然可以定义函数的积分，但是不能定义微分形式的积分。

5.2 可定向曲面及其边界

对于带边界的可定向曲面$\mathcal{M}$, 其边界曲面$\partial\mathcal{M}$ 也是可定向的，且自然继承$\mathcal{M}$ 的定向。

我们通过$\mathcal{M}$ 上的坐标卡确定$\partial\mathcal{M}$ 上的坐标卡。对于可定向曲面$\mathcal{M}$, 假设$p \in \partial\mathcal{M}$ 是$\mathcal{M}$ 上的一点。我们要求p 点处的坐标卡(U_p, Φ) 满足：1，符合$\mathcal{M}$ 的定向；2，$\Phi : C'_m = (-1,1)^m \bigcap \{x_m \geq 0\} \longrightarrow \mathcal{M}$。那么此时$\partial C'_m = (-1,1)^m \bigcap \{x_m = 0\}$ 则是一个边界曲面$\partial\mathcal{M}$ 的备用坐标卡。但是注意，$\partial C'_m$ 是否能作为$\partial\mathcal{M}$ 的坐标卡还取决于m 的奇偶性。如果m 是偶数，则$\partial C'_m$ 的定向即$\partial\mathcal{M}$ 的定向，反之则定向相反。

5.3 2维正方形区域上的斯托克斯公式

【课堂内容】

> 作业**5.1.** 对n 维正方体$\mathcal{M}=\{(x^1,...,x^n):0\le x^i\le 1\}$ 证明斯托克斯公式。

5.4 n维任意区域上的斯托克斯公式

【课堂略讲】

> 作业**5.2.** 对2 维单纯复形$C_2=\{(x,y):0\le x,y\le 1,0\le x+y\le 1\}$ 证明斯托克斯公式。

5.5 格林公式和高斯散度定理

定理**5.2** (格林公式)**.** 假设C 是平面中的一条逆时针方向的简单闭合的光滑曲线（不和自己相交，首尾相连）。其内部区域记为Ω。设L,M 为$\Omega\bigcup C$ 上的光滑函数。则

$$\oint_C Ldx+Mdy=\int_\Omega (M_x-L_y)dxdy \tag{39}$$

证明**.** 令$\omega=Ldx+Mdy$，则$d\omega=L_y dy\wedge dx+M_x dx\wedge dy=(M_x-L_y)dx\wedge dy$。。。 □

定理**5.3** (高斯散度定理)**.** 设区域Ω 由可定向闭曲面$\partial\Omega$ 包围，f,g,h 为$\Omega\bigcup\partial\Omega$ 上的光滑函数。则

$$\int_\Omega (f_x+g_y+h_z)dxdydz=\int_{\partial\Omega}\langle(f,g,h),\mathbf{n}\rangle dS \tag{40}$$