分离变量法

分离变量法是一种常见的解偏微分方程的方法。但分离变量法求得的解不是一定包含所有情况。本讲义的目的是探讨分离变量法什么时候不会漏掉一些解。内容包括：连带勒让德函数，贝塞尔函数。

1 平面上的调和方程

考虑全平面$\mathbb{R}^2$ 上的调和方程:

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

考虑分离变量法，令$u(x,y) = X(x)Y(y)$，则原方程化为：

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \tag{2}$$

因此必然存在复常数k，使得

$$X'' = k^2 X \tag{3}$$
$$Y'' = -k^2 Y \tag{4}$$

由此可解得$u = C_k \exp\{\pm k(x+iy)\}$，以及更一般的

$$u(x,y) = \sum_k C_k \exp\{\pm k(x+iy)\} \tag{5}$$

那么是否所有的解$u(x,y)$ 都可以写成上式的形式？如果上式中求和有无穷多项，如何定义其无穷和,是逐点收敛还是在某个范数的意义下收敛?

事实上，对于全平面上的调和方程，我们可以通过复变函数理论得到其通解的一般表达式。具体步骤如下：

- 若$u(x,y)$ 满足全平面上的调和方程，则一定存在一个光滑函数$v(x,y)$ 使得$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ 是一个复平面上的解析函数。
- 反过来，任何一个全复平面上的解析函数$f(z)$，其实部一定满足调和方程。
- {全复平面上的解析函数} 和{全平面上的调和函数} 之间有1-1对应关系。
- $\mathbb{C}$ 上的解析函数有洛朗展开$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$，满足$\liminf_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = 0$
- 对任何满足$\liminf_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = 0$ 的复数序列，$u(x,y) = Re(\sum_k c_k (x+iy)^k)$ 都满足调和方程。

由此可见，对于此问题，分离变量法求出的解无法代表所有的解。分离变量法求出的解只能覆盖通解的一些特殊情形。

2 球坐标系中的拉普拉斯方程

对于$r \in (0,\infty)$, $\theta \in (0,\pi)$, $\phi \in [0,2\pi)$，定义映射:

$$\begin{aligned}(0,\infty)\times(0,\pi)\times[0,2\pi) &\longrightarrow \mathbb{R}^3\\ (\rho,\theta,\phi) &\longrightarrow (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)\end{aligned} \tag{6}$$

这就是$\mathbb{R}^3$ 的球坐标系。除去$\mathbb{R}^3$ 的z 轴，球坐标系定义了一个一一对应关系。通过链式法则，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\\ &= (\sin\theta\cos\phi)\frac{\partial}{\partial x} + (\sin\theta\sin\phi)\frac{\partial}{\partial y} + (\cos\theta)\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned} \tag{7}$$

类似地有:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = (r\cos\theta\cos\phi)\frac{\partial}{\partial x} + (r\cos\theta\sin\phi)\frac{\partial}{\partial y} - (r\sin\theta)\frac{\partial}{\partial z} \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = (-r\sin\theta\sin\phi)\frac{\partial}{\partial x} + (r\sin\theta\cos\phi)\frac{\partial}{\partial y} \tag{9}$$

因此

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial \theta}\\ \frac{\partial}{\partial \phi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\\ r\cos\theta\cos\phi & r\cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\\ -r\sin\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{pmatrix}r^2\sin^2\theta\cos\phi & r\sin\theta\cos\theta\cos\phi & -r\sin\phi\\ r^2\sin^2\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\theta\sin\phi & r\cos\phi\\ r^2\sin\theta\cos\theta & -r\sin^2\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\\ \frac{\partial}{\partial \theta}\\ \frac{\partial}{\partial \phi}\end{pmatrix} \tag{11}$$

由此可求得拉普拉斯算符在球坐标系下的表达:

$$\Delta f = f_{rr} + \frac{2}{r}f_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta f_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}f_{\phi\phi} \tag{12}$$

目标是在三维欧氏空间求解

$$\Delta f = 0 \tag{13}$$

等同于在球坐标系下解

$$r^2 f_{rr} + 2r f_r + \frac{(\sin\theta f_\theta)_\theta}{\sin\theta} + \frac{f_{\phi\phi}}{\sin^2\theta} = 0 \tag{14}$$

注意上式右边两项是球面上的拉普拉斯算子（见下节）。根据球面上拉普拉斯算子Δ_s 的谱理论, 球面上的一阶导平方可积函数空间$\mathcal{H} = \mathrm{Span}\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, ...\}$, 其中$\psi_i$ 都是Δ_s 的本征函数，$\psi_0 = 1$ 为常值函数。因此对每个固定的r_0, $f(r_0, \theta, \phi)$ 可以写为:

$$f(r_0, \theta, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k \tag{15}$$

其中系数a_k 依赖于r_0, 因此是r 的函数。因此

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(r) \psi_k(\theta, \phi) \tag{16}$$

将表达式(16) 代入方程(14)，可得:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (r^2 a_k'' + 2r a_k' + a_k \lambda_k) \psi_k = 0 \tag{17}$$

其中λ_k 是Δ_s 的第k 个本征值。因此a_k 必须满足

$$r^2 a_k'' + 2r a_k' + \lambda_k a_k = 0 \tag{18}$$

这与用分离变量法解方程(14) 得出的结论一样。已知（见下节）$\lambda_k = -k(k+1)$, 可求得$a_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-(k+1)}$。$\psi_k$ 的求解见下文。对于此问题，分离变量法可以求得所有解的一组基。关键点在于Δ_s 的本征函数构成$\mathcal{H}$ 的一组基。

> 作业**2.1.** 利用极坐标系和分离变量法求解全平面上的调和方程，并讨论是否分离变量法求出的解覆盖所有情形。

3 球面上的拉普拉斯算子的本征值问题

已知在球坐标系(θ, ϕ)下，（由Hodge 理论可推出）球面上的拉普拉斯算子可以写为

$$\Delta u = \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\Big) \tag{19}$$

$$= \frac{u_{\phi\phi}}{\sin^2\theta} + \frac{(u_\theta \sin\theta)_\theta}{\sin\theta}, \tag{20}$$

其中$\theta \in [0, \pi]$代表球表面的纬度($\theta = 0$代表北极)，$\phi \in [0, 2\pi]$代表球表面的经度。

本例题的目标是求解以下本征值问题:

$$-\Delta u = \lambda u \tag{21}$$

对于每个固定的$\theta_0 \in (0,\pi)$, $u(\theta_0,\phi)$ 可以看成一个关于ϕ 的周期函数, 因此可以有傅里叶展开:

$$u(\theta_0,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i \cos k\phi + b_i \sin k\phi) \tag{22}$$

改变θ_0，相应的a_i, b_i 的值也会改变，因此a_i, b_i 都是θ 的函数。因此

$$u(\theta,\phi) = a_0(\theta) + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(\theta)\cos k\phi + b_k(\theta)\sin k\phi) \tag{23}$$

将Eq.((23)) 代入Eq.((20))，可得:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(-\frac{k^2 a_k}{\sin^2\theta} + \frac{(a_k'\sin\theta)'}{\sin\theta}\Big)\cos k\phi + \Big(-\frac{k^2 b_k}{\sin^2\theta} + \frac{(b_k'\sin\theta)'}{\sin\theta}\Big)\sin k\phi = \lambda u \tag{24}$$

对比其傅里叶展开的系数函数，可知函数$a_k(\theta), b_k(\theta)$ 是如下本征值问题的解:

$$-\frac{k^2 U}{\sin^2\theta} + \frac{(U'\sin\theta)'}{\sin\theta} = \lambda U \tag{25}$$

这和分离变量法推出的方程相同。令$x = \cos\theta$，得到连带勒让德方程(associated Legendre equation):

$$(1-x^2)U'' - 2xU' + (\lambda - \frac{k^2}{1-x^2})U = 0 \tag{26}$$

连带勒让得方程很难通过直接求解得到系数的通项公式。对于方程(26)一般常见的“解法”可以参考《数学物理方法（第五版）》（梁昆淼著）10.2节，但这样的解法的关键在于要先“猜出”解的正确形式。但是怎么发现解的正确形式？这对于绝大部分的读者都是很困难的。以下我们提供一个相对正常的思路。

这里我们先假设$u = u(\theta)$，即u和ϕ无关。于是结合式(21)和式(20)，得到以下方程:

$$\frac{d(\sin\theta\frac{du}{d\theta})}{d\theta} = -\lambda u \sin\theta \tag{27}$$

做变量替换：$t = \cos\theta$，则

$$dt = -\sin\theta d\theta \tag{28}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{d}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d}{dt} \tag{29}$$

于是方程(27) 在新变量t下可以写为（此时θ可以看成关于t的函数）:

$$-\sin\theta\frac{d(-\sin^2\theta\frac{du}{dt})}{dt} = -\lambda u \sin\theta, \tag{30}$$

即:

$$\frac{d[(1-t^2)\frac{du}{dt}]}{dt} = -\lambda u \tag{31}$$

此时我们得到关于变量t的SL方程。注意这个方程不是正则的SL方程。将其展开化简得到:

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{2t}{1-t^2}\frac{du}{dt} + \frac{\lambda}{1-t^2}u = 0 \tag{32}$$

令$f(t) = \frac{-2t}{1-t^2}$, $g(t) = \frac{\lambda}{1-t^2}$，他们有如下泰勒展开(洛朗级数):

$$f(t) = -2t\sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} -2t^{2k+1} \tag{33}$$

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda t^{2k} \tag{34}$$

即$f_{2k} = 0$, $f_{2k+1} = -2$, $g_{2k} = \lambda$, $g_{2k+1} = 0$。于是有:

$$\begin{aligned}2n(2n-1)a_{2n} =& -\Big\{(2n-1)f_0a_{2n-1} + (2n-2)f_1a_{2n-2} + ... + f_{2n-2}a_1\Big\} \\ & - \Big\{g_{2n-2}a_0 + g_{2n-1}a_1 + ... + g_0a_{2n-2}\Big\} \qquad (35)\\ =& \Big\{2\sum_{k=1}^{n-1} 2ka_{2k}\Big\} - \Big\{\lambda \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k}\Big\} \qquad (36)\\ =& \sum_{k=0}^{n-1}(4k-\lambda)a_{2k} \qquad (37)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}(2n+1)2na_{2n+1} =& -\Big\{2nf_0a_{2n} + (2n-1)f_1a_{2n-1} + ... + f_{2n-1}a_1\Big\} \\ & - \Big\{g_{2n-1}a_0 + g_{2n-2}a_1 + ... + g_0a_{2n-1}\Big\} \qquad (38)\\ =& 2\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)a_{2k+1} - \lambda\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1} \qquad (39)\\ =& \sum_{k=0}^{n-1}(4k+2-\lambda)a_{2k+1} \qquad (40)\end{aligned}$$

为了进一步求得a_n的具体表达式，将式(37) 中的n换成$n-1$，有

$$\begin{aligned}(2n-2)(2n-3)a_{2n-2} =& \sum_{k=0}^{n-2}(4k-\lambda)a_{2k} \qquad (41)\\ =& 2n(2n-1)a_{2n} - (4n-4-\lambda)a_{2n-2} \qquad (42)\end{aligned}$$

于是

$$a_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-2)-\lambda}{2n(2n-1)} a_{2n-2} \tag{43}$$

用同样的方法可得:

$$a_{2n+1} = \frac{2n(2n-1)-\lambda}{(2n+1)2n} a_{2n-1} \tag{44}$$

式(43)和式(44)可以统一写为:

$$a_k = \frac{(k-1)(k-2)-\lambda}{k(k-1)} a_{k-2} \tag{45}$$

式(45)表明，对于任何给定的a_0、a_1 以及λ，都可以递归地推导出所有的系数。那么是不是所有的实数λ都可以作为方程(21) 的本征值？SL理论表明，对于正则的SL问题，其本征值一定是离散的且趋于无穷大。球面上的拉普拉斯算子也是一个“正则”的算子。方程(31)看起来不是正则的是因为我们选取的坐标系的原因。

为了方便讨论，我们如下定义u_0和u_1:

$$u_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{2k} t^{2k} \tag{46}$$

$$u_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{2k+1} t^{2k+1}, \tag{47}$$

其中$\tilde{a}_{2k}$和$\tilde{a}_{2k+1}$分别由初始条件$\tilde{a}_0 = 1$和$\tilde{a}_1 = 1$确定。此时对于$u = \sum_k a_k t^k$，可以很方便地写成$u = a_0 u_0 + a_1 u_1$。

注意，尽管对于给定的λ, a_0, a_1,可以递归地算出所有a_k的值，但这不代表级数$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$可以定义一个$[-1,1]$上的函数。另外，由于$t = \pm 1$分别对应球面的南北极，而南北极对一个球面来说没有什么特殊，因此我们还至少得要求级数函数$u(t) = \sum_k a_k t^k$满足极限$\lim_{t\to\pm 1} u(t)$ 存在且都有限。

为了讨论清楚这个问题，我们将系数a_k的一些性质列举如下:

(A1), 对于任何固定的λ，如果$a_0 a_1 \neq 0$且对任意的k，$\lambda \neq (k-1)(k-2)$,
则$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k-2}} = 1$;

(A2), 对于任意固定的λ, 存在M，使得对任意的$k > M$,$|a_k| \le |a_{k-2}|$

(A3), 对于任意固定的λ，存在数M, 使得对任意的$k > M$, a_{2k}的符号都一致, a_{2k+1}的符号也都一致，但有可能a_{2k}和a_{2k+1}的符号不一致;

(A4), 如果$a_0 a_1 \neq 0$且对任意的k，$\lambda \neq (k-1)(k-2)$，则$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$。

其中(A1)容易证明，(A2)、(A3)、(A)都容易由(A1)推导得出。性质(A3)说明级数$\sum_k a_k t^k$ 的收敛半

径为1。因此当$-1 < t < 1$时，级数函数$u(t)$一定绝对收敛。性质(A3)说明:

$$\lim_{t\to\pm 1} u_0(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{2k} \tag{48}$$

$$\lim_{t\to\pm 1} u_1(t) = \pm\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_{2k+1} \tag{49}$$

因此，级数函数u_0（或u_1）能够从$(-1,1)$扩充到整个闭区间$[-1,1]$，当且仅当$\sum_k \tilde{a}_{2k}$收敛（或$\sum_k \tilde{a}_{2k+1}$收敛）。

性质(A2)表明，在一般情形下，$|a_k|$的绝对值是隔项递减的。但是这不代表$\sum_k a_k$一定收敛或发散。单调递减的数列之和收敛或发散都是有可能的，比如$\sum_{k>0}\frac{1}{k}$发散而$\sum_{k>0}\frac{1}{k^2}$收敛。因此，为了搞清楚到底它发散还是收敛，我们还需要对$|a_k|$递减的"速度"有个估计。为此，我们将式(45)重新写为:

$$ka_k = (k-2)a_{k-2}[1 - \frac{\lambda}{(k-1)(k-2)}] \tag{50}$$

可以证明，对于固定的λ，存在$M > 0$,使得对任意的$k > M$, 有$0 < 1 - \frac{\lambda}{(k-1)(k-2)} < 1$。且

$$\prod_{k=M+1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{(k-1)(k-2)}\right) \to c > 0 \tag{51}$$

这说明a_k递减的速度和$1/k$是一个量级。因此如果所有的$\tilde{a}_{2k}$都不为0，则级数$\sum_k \tilde{a}_{2k}$必定发散。对$\tilde{a}_{2k+1}$我们有相同的结论。

因此，若要u_0和u_1扩张到整个闭区间$[-1,1]$，必须要存在一个整数$k \geq 2$，使得$\lambda = (k-1)(k-2)$。此时u_0和u_1中有一个是关于$t = \cos\theta$的多项式，且（当然）可以扩张到$[-1,1]$。这个多项式被称为$(k-2)$阶勒让德多项式，记为P_{k-2}。

最后，是否有可能u_0和u_1都不在$t = \pm 1$处收敛，但存在一个u_0和u_1的线性组合$u = a_0u_0 + a_1u_1$,使得u可以扩张到$t = \pm 1$？假设如此。但性质(A3)表明，要么在$t = 1$附近，要么在$t = -1$附近，当k足够大时$a_{2k}t^{2k}$和$a_{2k+1}t^{2k+1}$的符号一定一致，如果此时u可以扩张到$t = 1$或$t = -1$，则u_0和u_1也必定可以扩张到$t = 1$或$t = -1$,和前面推出的结论矛盾。

综上所述，球面上的拉普拉斯本征值问题在假设$u = u(\theta)$的前提下，其本征值$\lambda_n = n(n+1)$，对应的本征函数为勒让德多项式$P_n(\cos\theta)$。

还没结束！

注意到我们求出的本征解$P_n(\cos\theta)$依赖于坐标系的选取，而球面坐标系(θ,ϕ) 本质上由穿过球心的一条极轴决定。在之前的推导中，我们假设极轴是贯穿南北极的那条线。但很明显我们也可以选取其它极轴。假如我们选取了另一条极轴得到一个新的球面坐标系(θ_1,ϕ_1)，我们可以对相同的本征值λ_n 得到一个新的本征函数$P_n(\cos\theta_1)$。这也表示球面上的拉普拉斯算子的本征函数空间并不一定是一维的，这和正则SL问题的情况不同。对于由两个不同球面坐标系得到的两个本征函数$P_n(\cos\theta_1)$ 和$P_n(\cos\theta)$，很明显它们的任意线性组合也一定属于相同的本征值。

因此我们考虑，对初始的极轴朝某一个方向做一个小的扰动，记为δ，得到新的极轴和新的球面坐标系(θ_1,ϕ_1)，以及新的本征函数$P_n(\cos\theta_1)$。然后考虑

$$Q(\cos\theta) = \lim_{\delta\to 0}\frac{P_n(\cos\theta_1) - P_n(\cos\theta)}{\delta} \tag{52}$$

则$Q(\cos\theta)$也一定是一个本征值为λ_n的本征函数。不难看出，初始极轴被扰动的所有可能方向的集合构成球面北极处的切平面，因此有两个自由度。这里我们分别考虑

- 扰动1：方向为(x,z)平面朝着x轴的负方向，扰动角度记为α。
- 扰动2：方向为(y,z)平面朝着y轴的正方向，扰动角度记为β

对于扰动1，在原坐标系下的(θ,ϕ)在扰动后的球面坐标系中的坐标$(\theta_1,\phi_1)=(\theta_1(\alpha),\phi_1(\alpha))$满足

$$\begin{pmatrix}\sin\theta_1\cos\phi_1\\ \sin\theta_1\sin\phi_1\\ \cos\theta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \tag{53}$$

其中第三行为：

$$\cos\theta_1=-\sin\alpha\sin\theta\cos\phi+\cos\alpha\cos\theta \tag{54}$$

因此

$$d(\cos\theta_1)\Big|_{\alpha=0}=-sin\theta d\theta_1=-\cos\alpha\Big|_{\alpha=0}\sin\theta\cos\phi d\alpha-\sin\alpha\Big|_{\alpha=0}\cos\theta d\alpha \tag{55}$$

$$\Longrightarrow\frac{d\theta_1}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=\cos\phi \tag{56}$$

相应的，由式(53)第二行可以计算出：

$$\frac{d\phi_1}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=-\frac{\sin\phi\cos\theta}{\sin\theta}d\alpha \tag{57}$$

因此

$$\frac{dP_n(\cos\theta_1)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=P_n'(\cos\theta)(-\sin\theta)\frac{d\theta_1}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}=-\sin\theta P_n'(\cos\theta)\cos\phi \tag{58}$$

对于扰动2，在原坐标系下的(θ,ϕ)在扰动后的球面坐标系中的坐标$(\theta_1,\phi_1)=(\theta_1(\beta),\phi_1(\beta))$满足

$$\begin{pmatrix}\sin\theta_1\cos\phi_1\\ \sin\theta_1\sin\phi_1\\ \cos\theta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta\\ 0 & \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\\ \cos\theta\end{pmatrix} \tag{59}$$

其中第三行为：

$$\cos\theta_1=\sin\beta\sin\theta\sin\phi+\cos\beta\cos\theta \tag{60}$$

因此

$$d(\cos\theta_1)\Big|_{\beta=0}=-sin\theta d\theta_1=\cos\beta\Big|_{\beta=0}\sin\theta\sin\phi d\beta-\sin\beta\Big|_{\beta=0}\cos\theta d\beta \tag{61}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\theta_1}{d\beta}\Big|_{\beta=0} = -\sin\phi \tag{62}$$

相应的，由式(59)第一行可以计算出：

$$\frac{d\phi_1}{d\beta}\Big|_{\alpha=0} = -\frac{\cos\phi\cos\theta}{\sin\theta}d\beta \tag{63}$$

此时

$$\frac{dP_n(\cos\theta_1)}{d\beta}\Big|_{\beta=0} = P_n'(\cos\theta)(-\sin\theta)\frac{d\theta_1}{d\beta}\Big|_{\beta=0} = \sin\theta P_n'(\cos\theta)\sin\phi \tag{64}$$

由此，我们得到另外两个本征解$P_n'\sin\theta\sin\phi$ 和$P_n'\sin\theta\cos\phi$。

这个过程可以继续下去，令$P_n^{(m)} = \frac{d^m P_n}{dx^m}$ 为P_n的m 阶导数。对于扰动1，通过直接计算可得:

$$\begin{aligned}\frac{dP_n^{(m)}\sin^m\theta_1\cos(m\phi_1)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} &= P_n^{(m+1)}(-sin\theta)\sin^m\theta\cos(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\alpha}\\ &+ P_n^{(m)}m\sin^{m-1}\theta\cos\theta\cos(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\alpha} + P_n^{(m)}\sin^m\theta(-m\sin(m\phi))\frac{d\phi_1}{d\alpha}\\ &=mP_n^{(m)}\sin^{m-1}\theta\cos\theta\cos((m-1)\phi) - P_n^{(m+1)}\sin^{m+1}\theta\cos(m\phi)\cos\phi\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP_n^{(m)}\sin^m\theta_1\sin(m\phi_1)}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0} &= P_n^{(m+1)}(-sin\theta)\sin^m\theta\sin(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\alpha}\\ &+ P_n^{(m)}m\sin^{m-1}\theta\cos\theta\sin(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\alpha} + P_n^{(m)}\sin^m\theta(m\cos(m\phi))\frac{d\phi_1}{d\alpha}\\ &=mP_n^{(m)}\sin^{m-1}\theta\cos\theta\sin((m-1)\phi) - P_n^{(m+1)}\sin^{m+1}\theta\sin(m\phi)\cos\phi\end{aligned} \tag{66}$$

对于扰动2，直接计算可得:

$$\begin{aligned}\frac{dP_n^{(m)}\sin^m\theta_1\cos(m\phi_1)}{d\beta}\Big|_{\beta=0} &= P_n^{(m+1)}(-sin\theta)\sin^m\theta\cos(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\beta}\\ &+ P_n^{(m)}m\sin^{m-1}\theta\cos\theta\cos(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\beta} + P_n^{(m)}\sin^m\theta(-m\sin(m\phi))\frac{d\phi_1}{d\beta}\\ &=mP_n^{(m)}\sin^{m-1}\theta\cos\theta\sin((m-1)\phi) + P_n^{(m+1)}\sin^{m+1}\theta\cos(m\phi)\sin\phi\end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP_n^{(m)}\sin^m\theta_1\sin(m\phi_1)}{d\beta}\Big|_{\beta=0} &= P_n^{(m+1)}(-sin\theta)\sin^m\theta\sin(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\beta}\\ &+ P_n^{(m)}m\sin^{m-1}\theta\cos\theta\sin(m\phi)\frac{d\theta_1}{d\beta} + P_n^{(m)}\sin^m\theta(m\cos(m\phi))\frac{d\phi_1}{d\beta}\\ &=-mP_n^{(m)}\sin^{m-1}\theta\cos\theta\cos((m-1)\phi) + P_n^{(m+1)}\sin^{m+1}\theta\sin(m\phi)\sin\phi\end{aligned} \tag{68}$$

式(65) + 式(68)，式(66) − 式(67)，表明若$\sin^m\theta P_n^{(m)}\cos m\phi$ 和$\sin^m\theta P_n^{(m)}\sin m\phi$ 是本征解，

则$\sin^{m+1}\theta P_n^{(m+1)}\cos(m+1)\phi$ 和$\sin^{m+1}\theta P_n^{(m+1)}\sin(m+1)\phi$ 也是本征解。

因此对任意的n, m，

$$\sin^m\theta P_n^{(m)}(\cos\theta)(A\cos(m\phi)+B\sin(m\phi)) \tag{69}$$

都是对应于λ_n的本征解，其中$P_n^{(m)}$ 代表$\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$。

4 2维区域中的拉普拉斯算子本征值问题

考虑极坐标：

$$x = r\cos\theta \tag{70}$$

$$y = r\sin\theta \tag{71}$$

则平面上的拉普拉斯算子在极坐标下的表示为：

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \tag{72}$$

我们的目标是求解

$$\Delta u = \lambda u \tag{73}$$

考虑

$$u(r,\theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(r)\cos(n\theta) + b_n(r)\sin(n\theta)] \tag{74}$$

则$a_n(r), b_n(r)$ 必须满足如下的方程：

$$U_n'' + \frac{1}{r}U_n' - \frac{n^2}{r^2}U_n = \lambda U_n \tag{75}$$

先假设

$$U_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n,k}x^k \tag{76}$$

则系数$c_{n,k}$ 满足

$$(k^2 - n^2)c_{n,k} = \lambda c_{n,k-2} \tag{77}$$

为了保证$\sum_k c_{n,k}x^k$ 的收敛性，必须

$$c_{n,k} = \begin{cases} 0 & \text{如果} k < n \\ 0 & \text{如果} k = n+1, n+3, n+5, \ldots \end{cases} \tag{78}$$

因此

$$U_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_{n,n+2l} x^{n+2l} = c_{n,n} x^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n!}{l!(n+l)!} \left(\frac{\lambda x^2}{4}\right)^l \tag{79}$$

$U_n(x)$ 与贝塞尔函数密切相关:

$$U_n(x) = (\frac{2}{\sqrt{-\lambda}})^n n! J_n(\sqrt{-\lambda} x) \tag{80}$$

根据常微分方程的理论，在$r \neq 0$ 的地方，方程(75) 对任意λ 的解空间都是二维的。而我们求出的U_n 只代表其中一个维度。根据Frobenius 的方法，我们可以假设另一个解有如下形式:

$$V_n = (\ln x) U_n(x) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{n,k} x^k \tag{81}$$

5 三维空间中的拉普拉斯本征值问题

我们要求u 和λ 满足

$$\Delta u = \lambda u \tag{82}$$

由展开式(16), 可知系数$a_n(r), b_n(r)$ 必须满足如下的微分方程:

$$U_n'' + \frac{2}{x} U_n' - \frac{n(n+1)}{x^2} U_n = \lambda U_n \tag{83}$$

假设$U_n(x)$ 有展开:

$$U_n(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n,k} x^k \tag{84}$$

则系数$c_{n,k}$ 必须满足方程:

$$(k+n+1)(k-n) c_{n,k} = \lambda c_{n,k-2} \tag{85}$$

由此可知:

$$0 = c_{n,-n-4} = c_{n,-n-3} = c_{n,-n-2} = c_{n,-n} = c_{n,-n+2} = ... = c_{n,n-2} \tag{86}$$

如果$\{(0,0,0)\} \in \Omega$，则额外的有:

$$0 = ... = c_{n,-n-1} = c_{-n+1} = ... = c_{n,n-1} = c_{n,n+1} = c_{n,n+3} = ... \tag{87}$$

此时有

$$U_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_{n,n+2l} x^{n+2l} = c_{n,n} x^n \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n!} \frac{(n+l)!}{(2n+2l+1)!} \frac{(\lambda x^2)^l}{l!} \tag{88}$$

这又是另一个和贝塞尔函数类似的函数?

6 “能否听出鼓的形状？”

这是1966年Mark Kac 一篇文章的标题。对于二维带边界的有界区域（鼓）Ω，考虑如下的波方程:

$$\begin{cases} u_{tt} & = \Delta u \\ u\big|_{\partial\Omega} & = 0 \end{cases} \tag{89}$$

分离（空间）变量法可以用来求解对称性较好的区域的拉普拉斯方程，但对一般形状的区域没有用。已知对于有界区域, 带有狄利希雷边界条件的拉普拉斯算子的本征函数$\{\psi_k : 1 \le k < \infty\}$ 构成$H_0^1(\Omega) = \{$所有在边界为0的1阶可微函数$\}$ 的一组单位正交基。设$\Delta\psi_k = \lambda_k\psi_k$，其中$\lambda_k \le 0$。假设

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\psi_k(x) \tag{90}$$

则系数a_k 必须满足

$$a_k'' = \lambda_k a_k \tag{91}$$

因此$a_k(t) = p_k\cos(\sqrt{-\lambda_k}t) + q_k\sin(\sqrt{-\lambda_k}t)$.

当你敲鼓时，等同于你给了方程(89) 一个初始值$u(0,x)$. 你听到的声音频率即信号的频率：$\sqrt{-\lambda_k}$. 而Ω 上狄利希雷边界条件的拉普拉斯本征值的集合即代表了所有你从Ω 上能听到的频率的集合。因此Mark Kac 的问题可以理解为，如果从两面鼓中听到了完全一样的声音频率，是否代表这两面鼓有相同的形状？换句话说，如果Ω_1 和Ω_2 对应于完全一样的集合$\{\lambda_k\}$，那么是否Ω_1 和Ω_2 有同样的形状？答案是否定的。